www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

CONCOURS D'ADMISSION — MATHEMATIQUES 2ème EPREUVE

Session de 1990 — **Durée 2 H - Coefficient 2**

EXERCICE I

Partie I :

Soient A, a, b des nombres réels strictement positifs ($b \neq a$). On considère la famille de fonctions $f_{A,a,b}$ définies par :

$$f_{A,a,b}(t) = \frac{A\,(e^{-at} - e^{-bt})}{b - a}$$

Étudier les variations de $f_{A,a,b}$ sur $\mathbb{R}^+$ et donner l'allure du graphe de $f_{A,a,b}$.

Partie II :

Une exploitation agricole utilise un certain type d'engrais. On a constaté que pour chaque quantité d'engrais consommée par le terrain, 1 % de cette quantité est transmise sous forme de nitrates à l'eau de la nappe phréatique. Ces nitrates sont ensuite dissouts dans la nappe.

On désigne par q_0, 1 % de la quantité totale Q_0 d'engrais répandue à l'instant $t_0 = 0$ dans le terrain.
On note $q_T(t)$, 1 % de la quantité totale $Q_T(t)$ d'engrais présente à l'instant t dans le terrain.
On note enfin $q_E(t)$, la quantité de nitrates présente à l'instant t dans l'eau.

On suppose que les fonctions $q_T(t)$ et $q_E(t)$ vérifient à tout instant t (tel que $q_T(t) \geqslant 0$ et $q_E(t) \geqslant 0$) les équations :

$$(1)\ q'_T(t) = -0{,}7\ q_T(t)$$
$$(2)\ q'_E(t) = 0{,}7\ q_T(t) - 0{,}4\ q_E(t)$$

où q'_T et q'_E sont les dérivées des fonctions q_T et q_E.

1°) Comment interpréter ces équations ?

2°) a) Montrer que la fonction $q_T(t) = q_0\, e^{-0{,}7t}$ vérifie l'équation (1).

b) Montrer qu'une fonction de la famille décrite dans la partie I (avec $a = 0{,}7$; $b = 0{,}4$; et A une constante à déterminer) vérifie l'équation (2).

Partie III :

On souhaite contrôler la quantité de nitrates présente dans la nappe phréatique à tout instant t de façon à ce que $q_E(t)$ ait une valeur toujours inférieure à 2,3.

1°) Déterminer la quantité maximale Q_0 d'engrais qu'on peut répandre au temps $t_0 = 0$ de manière à ce que l'inégalité $q_E(t) \leqslant 2{,}3$ soit toujours vérifiée.

2°) On suppose que l'épandage est très rapide par rapport à la dynamique du système.
Dès que la quantité de nitrates dans l'eau est redescendue à la valeur 1,4 (à un temps τ), l'exploitant est autorisé à effectuer un deuxième épandage d'une quantité $Q_{0\tau}$ d'engrais.

a) Déterminer graphiquement l'instant τ.

b) Calculer $Q_{0\tau}$ de manière à ne pas dépasser le seuil de toxicité 2,3.

.../...

EXERCICE II

On considère l'ensemble S des matrices de la forme : $P = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}$ avec $(a, b) \in]0,1[\times]0,1[$.

Partie I :

1°) Montrer que le produit de deux éléments de S est élément de S.

2°) On pose $d = a - b$; montrer que : $\forall n \geq 1 \quad P^n = \frac{1}{1-d}[(1-d^n)P - d(1-d^{n-1})I]$ où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3°) On pose pour $n \geq 1$ $P^n = \begin{pmatrix} u_n & v_n \\ w_n & x_n \end{pmatrix}$.

On dit que la suite de matrices (P^n) converge vers une limite $L = \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix}$ si et seulement si les quatre suites (u_n), (v_n), (w_n) et (x_n) convergent et ont pour limites respectives u, v, w, x lorsque n tend vers l'infini.

Montrer que la suite (P^n) converge vers une matrice L qu'on explicitera. L appartient-elle à S ?

4°) Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice P de S ne soit pas inversible. Montrer qu'elle vérifie alors :
$\forall n \geq 1 \qquad P^n = P$.

Partie II :

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les cercles (C_1) et (C_2) tels que (C_1) ait pour centre O (0, 0) et pour rayon $R_1 = 1$; et (C_2) ait pour centre O' (− 1, 0) et pour rayon $R_2 = 2$.
On appelle A le point de coordonnées (1, 0).

Un point mobile M a pour trajectoire $(C_1) \cup (C_2)$; son mouvement s'effectue à vitesse constante, dans le sens des aiguilles d'une montre. Il parcourt un cercle en 2π unités de temps.

On fait les hypothèses suivantes :

– Le mobile peut partir de A aussi bien sur (C_1) que sur (C_2) avec des probabilités égales. (Il a ainsi la probabilité 1/2 de parcourir (C_1) pendant l'intervalle de temps $[0, 2\pi]$.)

– A chacun de ses passages en A, le mobile peut aussi bien rester sur la même courbe que changer de courbe : la probabilité de rester sur (C_1) s'il vient de (C_1) est p $(0 < p < 1)$. La probabilité de rester sur (C_2) s'il vient de (C_2) est q $(0 < q < 1)$.
Ces probabilités sont indépendantes du numéro d'ordre de passage en A.

On désigne par α_n la probabilité pour que le mobile parcoure (C_1) pendant l'intervalle de temps $[2n\pi, (2n+2)\pi]$ et par β_n la probabilité pour qu'il parcoure (C_2) pendant le même intervalle de temps.

1°) Montrer qu'il existe une matrice $P \in S$ telle que :

$$\forall n \geq 1 \qquad \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} = P^n \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

2°) Expliciter α_n et β_n . Calculer $\lim_{n \to +\infty} \alpha_n$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail